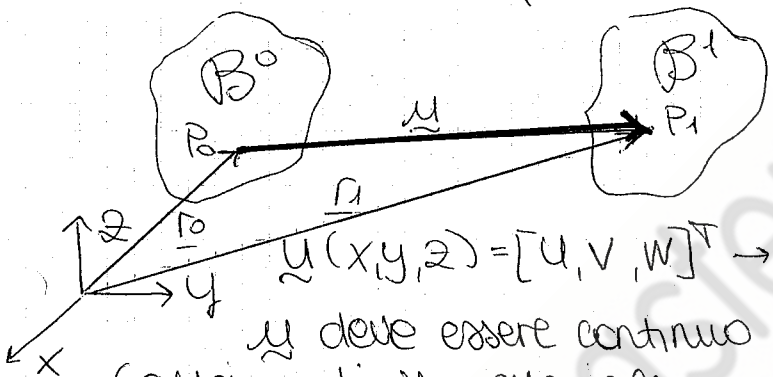
MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

CAPITOLO 5

CINEMATICA DELLA DEFORMAZIONE

CONFIGURAZIONE DI UN CORPO = insieme delle coordinate dei punti materiali del corpo definite una volta individuato un sistema di riferimento. Se cambia la configurazione del corpo da $\mathcal{B}^0$ a $\mathcal{B}^1$, niente vieta che cambi anche la sua forma.



$P_0 \equiv (x,y,z)$
$P_1 \equiv (x_1,y_1,z_1)$
Relazione di trasformaz.

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_0 + \underline{u}(x,y,z)$$

$\underset{\sim}{u}(x,y,z) = [u,v,w]^T \rightarrow$

$$\begin{cases} x' = x + u(x,y,z) \\ y' = y + v(x,y,z) \\ z' = z + w(x,y,z) \end{cases}$$

Trasformazione da C_0 in C_1

$\underset{\sim}{u}$ deve essere continuo (altrimenti il materiale si rompe).

$\underset{\sim}{u}$ deve essere anche derivabile rispetto a x,y,z 2 volte, altrimenti ho dei punti angolosi in cui è facile che nascano concentrazioni degli sforzi. $\underset{\sim}{u}$ deve essere anche invertibile. Queste caratteristiche garantiscono che la deformazione sia un fenomeno graduale e regolare.

Prendo un intorno di P_0 e prendo Q_0 appartenente a tale intorno. Q_0 avrà coordinate:

$$Q_0 \equiv (x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$$

Se trasformo Q_0 in Q_1 ottengo

$$Q_0 \rightarrow Q_1 \equiv (x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1, z_1+\delta z_1)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$x_1+\delta x_1 = x+\delta x + u(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) =$$
$$= x+\delta x + u(P_0) + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}\delta x + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}\delta y + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}\delta z$$

Prendo un punto piccolo da potermi fermare al primo termine dello sviluppo di Taylor.

$$x_1+\delta x_1 = x_1 + \delta x\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \delta y\frac{\partial u}{\partial y} + \delta z\frac{\partial u}{\partial z}$$

e analogamente vale per y_1 e z_1.

Si ottiene così una matrice dei coefficienti che viene detta.

TENSORE GRADIENTE DI DEFORMAZIONE (Matrice Jacobiana $\underline{\underline{J}}$)

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1+\frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$J = \det(\underline{\underline{J}}) \neq 0 \rightarrow$ La trasformazione è localmente invertibile (iniettiva e suriettiva)

Valuto il segno del Jacobiano. Chiamo dV_0 il volume infinitesimo associato all'intorno di P_0, con ρ densità di massa.

$dV_0 \rightarrow dm_0 = \rho_0 dV_0$

$dV_1 \rightarrow dm_1 = \rho_1 dV_1$

Per la conservazione della massa $dm_0 = dm_1$ e ottengo

$$\rho_0 dV_0 = \rho_1 dV_1 \rightarrow |J| = \det(\underline{\underline{J}}) = \frac{\rho_0}{\rho_1} > 0$$

Dunque il Jacobiano gode di proprietà di positività per i solidi e vale la relazione $dV_1 = |J| \cdot dV_0$

VARIAZIONE DI VOLUME NORMALIZZATA

$$\theta = \frac{dV_1 - dV_0}{dV_0}$$

$$\theta = \frac{dV_0|J| - dV_0}{dV_0} = |J| - 1 \rightarrow \theta = |J| - 1$$

Se avessi $J = \det(\underline{\underline{J}}) = 0$, le dimensioni dell'oggetto si ridurrebbero a un punto e non varrebbe più la conservazione della massa.

LINEARIZZAZIONE

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{I}} + \nabla \underline{u} \leftarrow \quad \underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$\nabla \underline{u}$ = gradiente di spostamento

Nella condizione in cui $|u_{i,j}| \ll 1$ (derivata j-esima della componente i-esima di $\underline{u}$) quanto vale il jacobiano? TEORIA LINEARE

$$|J| = \det(\underline{\underline{J}}) = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) =$$

$$= 1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{dunque} \quad \boxed{|J| = 1 + \operatorname{div}(\underline{u})} \quad \text{con } J > 0$$

J è sicuramente positivo perché la divergenza è comunque trascurabile rispetto all'unità.

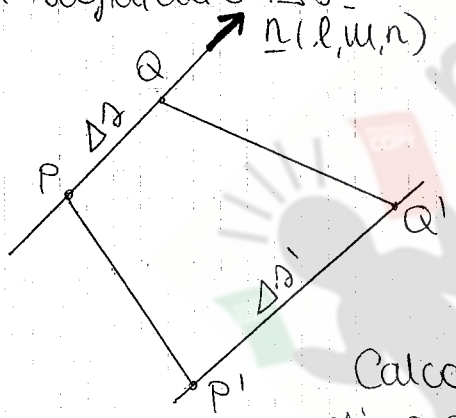
Da cui ricavo anche che $\theta = \mathrm{div}(\underline{u})$

Scompongo il gradiente di spostamento $\nabla \underline{u}$ in due matrici: $\underline{\underline{D}}$ simmetrica e $\underline{\underline{\Omega}}$ antisimmetrica.

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Valutiamo come viene deformato un segmento Δs in un segmento $\Delta s'$.



Legge di Hooke $F = k(l - l_0)$

COEFFICIENTE DI DILATAZIONE LINEARE

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$
$$(\Delta s')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2$$

Calcolo le componenti di $\Delta s'$ in funzione di quelle di Δs trascurando i quadrati.

$$(\Delta x')^2 = \left[\Delta x\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]^2 + 2\Delta x\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z\right) =$$
$$= \Delta x^2\left(1+2\Delta x\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2\Delta x\Delta y\frac{\partial v}{\partial x} + 2\Delta x\Delta z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$(\Delta y')^2 = \Delta y^2\left(1+2\frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\Delta y\Delta x\frac{\partial v}{\partial x} + 2\Delta y\Delta z\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$(\Delta z')^2 = \Delta z^2\left(1+2\frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\Delta z\Delta x\frac{\partial w}{\partial x} + 2\Delta z\Delta y\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$(\Delta s')^2 = \Delta s^2 + 2\left[\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x^2 + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y^2 + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x\Delta y + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Delta x\Delta z + \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Delta y\Delta z\right]$$

Da cui ottengo

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$ se chiamo $l = \frac{\Delta x}{\Delta s}$; $m = \frac{\Delta y}{\Delta s}$; $n = \frac{\Delta z}{\Delta s}$ ottengo

$$(\Delta s')^2 = \Delta s^2 \left[1 + 2\left(\varepsilon_{xx} l^2 + \varepsilon_{yy} m^2 + \varepsilon_{zz} n^2 + 2\varepsilon_{xy} lm + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2\varepsilon_{xz} ln + 2\varepsilon_{yz} mn\right)\right]$$

E ho $\Delta s' = \sqrt{(\Delta s')^2} \approx \Delta s \left[1 + \varepsilon_{nn}\right]$ grazie alla teoria lineare e a Taylor $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$

Essendo $\Delta s' \approx \Delta s (1 + \varepsilon_{nn})$

con $\varepsilon_{nn} = \varepsilon_{xx} l^2 + \varepsilon_{yy} m^2 + \varepsilon_{zz} n^2 + 2\varepsilon_{xy} lm + 2\varepsilon_{xz} ln + 2\varepsilon_{yz} mn$

ho che il coefficiente di dilatazione lineare vale $\varepsilon_{nn} = \frac{\Delta s (1+\varepsilon_{nn}) - \Delta s}{\Delta s}$

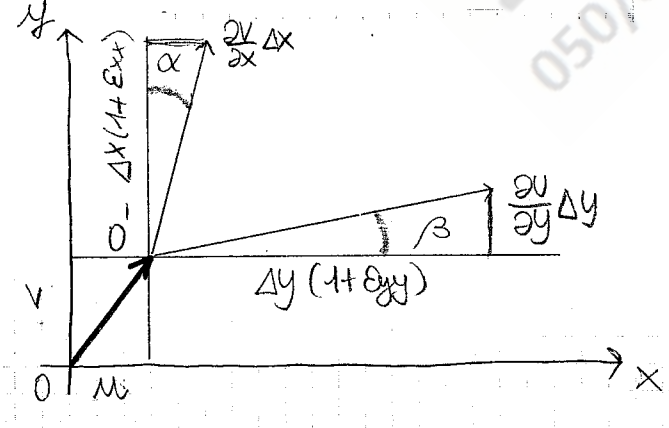
E tiene conto solo degli elementi della matrice simmetrica $\underline{\underline{D}}$. Questo è valido per tutte le direzioni uscenti da P e non solo per $\underline{n}$.

$\underline{\underline{D}}$ viene chiamato tensore della deformazione finita di Green-Lagrange. Vale che

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{n}^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} l + \varepsilon_{xy} m + \varepsilon_{xz} n \\ \varepsilon_{yx} l + \varepsilon_{yy} m + \varepsilon_{yz} n \\ \varepsilon_{zx} l + \varepsilon_{zy} m + \varepsilon_{zz} n \end{pmatrix} \quad \underline{n}^T = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

Moltplicando $\underline{n}$ per $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{n}^T$ ottengo

$\underline{n} \cdot (\underline{\underline{D}} \cdot \underline{n}^T) = \varepsilon_{nn}$ scalare



Inoltre, se α è piccolo (ipotesi di piccoli spostamenti) $tg\alpha \to \alpha$ Per cui

Campo di spostamento $(u, v, 0)$ PIANO xy

$O \to O'(u, v, 0)$

$$tg\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x}{\Delta x(1+\varepsilon_{xx})} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1+\varepsilon_{xx}} \simeq \frac{\partial v}{\partial x}(1-\varepsilon_{xx})$$

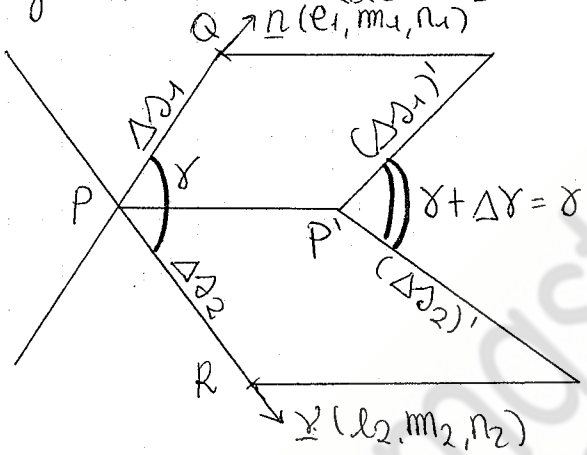
$$tg\alpha \simeq \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$tg\beta = \frac{\partial u/\partial y\, \Delta y}{\Delta y(1+\varepsilon_{yy})} = \frac{\partial u/\partial y}{1+\varepsilon_{yy}} = \frac{\partial u}{\partial y} = \beta \text{ se } \beta \text{ piccolo}$$

$$\begin{cases} \text{Angolo originario} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{CASO PARTICOLARE}) \\ \text{Angolo attuale} = \frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\pi}{2} - 2\varepsilon_{xy} \end{cases}$$

I termini misti del tensore della deformazione corrispondono alla variazione d'angolo tra due direzioni ortogonali dimezzata.



$$\cos\gamma = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$
$$\cos\gamma' = l_1' l_2' + m_1' m_2' + n_1' n_2'$$

$$l_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta\vartheta_1} \qquad l_1' = \frac{(\Delta x_1)'}{(\Delta\vartheta_1)'}$$

$$l_1' = \frac{\Delta x_1\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \Delta y_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \Delta z_1 \frac{\partial u}{\partial z}}{\Delta\vartheta_1 (1+\varepsilon_{s_1 s_1})}$$

$$\cos\gamma' = \cos(\gamma+\Delta\gamma) = \cos\gamma\cos\Delta\gamma - \sin\gamma\sin\Delta\gamma =$$
$$\cos\gamma' = \cos\gamma - \Delta\gamma\sin\gamma \qquad (\cos\Delta\gamma \to 1,\ \sin\Delta\gamma \to \Delta\gamma)$$

$$\cos\gamma(\varepsilon_{s_1 s_1} + \varepsilon_{s_2 s_2}) - \sin\gamma\,\Delta\gamma =$$
$$= 2\{\varepsilon_{xx} l_1 l_2 + \varepsilon_{yy} m_1 m_2 + \varepsilon_{zz} n_1 n_2 + \varepsilon_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) +$$
$$+ \varepsilon_{xz}(l_1 n_2 + l_2 n_1) + \varepsilon_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1)\} = 2\varepsilon_{s_1 s_2}$$
$$= \sum_{I,J=1}^{3} \varepsilon_{IJ} n_I v_J = 2\left(\underline{v}\cdot\left(\underline{\underline{D}}\cdot\underline{n}^T\right)\right)$$

Se $\gamma \to \pi/2$, se $\underline{n}(1,0,0)$ ASSE X, $\underline{v}(0,1,0)$ ASSE Y, allora $-\Delta\gamma = 2\varepsilon_{xy}$

In generale $\boxed{\gamma_{IJ} = 2\varepsilon_{IJ}}$

Le componenti fuori dalla diagonale del tensore della deformazione ε_{IJ} con $I \neq J$ rappresentano la metà degli scorrimenti tra gli assi corrispondenti ai pedici.
Mentre che gli elementi appartenenti alla diagonale principale rappresentano ordinatamente i coefficienti di dilatazione lineare degli assi coordinati.